図形・数列・三角関数の融合問題

問題　三角形 ABC において，頂点 A，B，C の角の大きさをそれぞれ A，B，C と表し，対辺の長さをそれぞれ a，b，c で表す。
また，a，b，c は，この順で正または 0 の公差をもつ等差数列をなすとする。

(1)　$C=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(2)　$C=2A$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ。　（2019，東京医科歯科大学，医）

解答　数列 a，b，c が等差数列をなすとき　$2b=a+c$　…… ①
また，公差を d $(d\geqq 0)$ とすると，3 数は　$a=b-d$，b，$c=b+d$　…… ②　と表せる。

(1)　余弦定理と ② から　$(b+d)^2=(b-d)^2+b^2-2(b-d)b\cos\dfrac{2}{3}\pi$　$\Leftrightarrow$　$2b^2-5bd=0$

$\Leftrightarrow b(2b-5d)=0$，　$b>0$ であるから　$2b-5d=0$　$\Leftrightarrow$　$b=\dfrac{5}{2}d$

ゆえに　$a=b-d=\dfrac{3}{2}d$，$c=b+d=\dfrac{7}{2}d$，　よって　$a:b:c=\dfrac{3}{2}d:\dfrac{5}{2}d:\dfrac{7}{2}d$

△ABC は正三角形でないから，$d>0$ であり，k を正の定数とすると

$a=3k$，$b=5k$，$c=7k$，　したがって，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25k^2+49k^2-9k^2}{2\cdot 5k\cdot 7k}=\frac{65k^2}{70k^2}=\frac{13}{14}$$ 答

(2)　$C=2A$ のとき　$B=\pi-(A+C)=\pi-3A$

$0<B<\pi$ から　$0<\pi-3A<\pi$　ゆえに　$0<A<\dfrac{\pi}{3}$　…… ③

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ から　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{3\sin A-4\sin^3 A}=\dfrac{c}{2\sin A\cos A}$

各辺に $\sin A$ を掛けて　$a=\dfrac{b}{3-4\sin^2 A}=\dfrac{c}{2\cos A}$

よって　$b=(3-4\sin^2 A)a=(4\cos^2 A-1)a$，　$c=2a\cos A$

① に代入して　$2(4\cos^2 A-1)a=a+2a\cos A$

両辺を a (>0) で割って整理すると　$8\cos^2 A-2\cos A-3=0$

ゆえに　$(2\cos A+1)(4\cos A-3)=0$　よって　$\cos A=-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{4}$

③ の範囲では $\dfrac{1}{2}<\cos A<1$ であるから　$\cos A=\dfrac{3}{4}$ 答

(3)　$C=A+\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$B=\pi-(A+C)=\dfrac{2}{3}\pi-2A$

$0<B<\pi$ から　$0<\dfrac{2}{3}\pi-2A<\pi$，　$A>0$ から，(2) と同様に　$0<A<\dfrac{\pi}{3}$　……③

△ABC の外接円を R とすると正弦定理から，　$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

① から　$4R\sin B=2R\sin A+2R\sin C$　$\Leftrightarrow$　$2\sin B=\sin A+\sin C$　…… ①′

$$\sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin B=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-2A\right)=\sin\left\{\pi-\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)\right\}=\sin\left(2A+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$$

であるから，①′ は　$4\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$

③ から　$\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)>0$ であるから　$\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

すなわち　$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$，　よって　$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos A-1)$

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より，$\frac{3}{4}(2\cos A-1)^2+\cos^2 A=1 \iff 16\cos^2 A-12\cos A-1=0$

$\cos A$ の 2 次方程式とみて解くと，　$\cos A=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-16\cdot(-1)}}{16}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{8}$

③ の範囲では $\frac{1}{2}<\cos A<1$ であるから　$\cos A=\frac{3+\sqrt{13}}{8}$ 答

(3) のみの別解　①′までは 解答 と同じ。$B=\frac{2}{3}\pi-2A$ より，$A=\frac{\pi}{3}-\frac{B}{2}$ ……④

$2\sin B=\sin A+\sin C$，　左辺$=4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$，　また　$A-C=-\frac{\pi}{3}$ で，

右辺 $=2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=2\sin\frac{\pi-B}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\cos\frac{B}{2}$，

$0<\frac{B}{2}<\frac{\pi}{2}$ で $\cos\frac{B}{2}>0$ より，　$\sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4} \Longrightarrow \cos\frac{B}{2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$ ……⑤

よって，④，⑤より，　$\cos A=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{B}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{B}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{B}{2}$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{3+\sqrt{13}}{8}$$ 答

解説　この問題は，図形と三角関数の多様性を示す問題である。辺の長さが等差数列になっているということもおもしろいが，これは辺の置き方を工夫するか，または「等差中項」を使えばよい。解答の (1) は，「等差中項」を踏まえた上で，「数学Ⅰ・A」の範囲，余弦定理で解いている。(2) では，正弦定理に加えて，「数学Ⅱ」の範囲の 2 倍角･3 倍角公式を利用して，$\cos A$ の 2 次方程式として解いている。(3) では，正弦定理から「角の正弦（sin）の値が等差数列をなしている」ことを見抜き，加法定理，2 倍角公式，合成の利用によって，やはり $\cos A$ の 2 次方程式に持ち込んで解いている。それに対して，(3) のみの別解 は，さらに一歩進めて，「和を積に変える」公式を用いて，$\sin\frac{B}{2}$，$\cos\frac{B}{2}$ の値を確定させ，あとは加法定理により順当に $\cos A$ を求めており，解の公式を利用していない。他にも座標を利用するなどの別解が考えられる良問である。2023年9月 文化祭展示「難関大学数学講座の10年」のアンケートでは第 5 位であったが，一部手を加えて今回の発表とした。

なぜ人間が発明したものでありながら，三角関数はこれほどまでに多様なのだろうか？　それは古代の天体観測に端を発し，その後 測量において三角比が多用され，近代になると三角関数として定義し直され，解析学の中心的な存在となり，自然科学への応用範囲も広くなったという歴史があるからだろう。あらためて三角関数の魅力の一端を学ぶことができたと思う。